Décomposition polaire (106, 152, 154, 157, 158)

NH2G2 tome 1 p 348

thm : L'application $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
$(O, S) \longmapsto OS$

démo :

* φ est continue car polynomiale
* φ est surjective : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On a $M^tM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. (car dans l'orbite de Id)

En effet, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\langle M^tMX, X\rangle = \langle MX, MX\rangle = \|MX\| \geq 0$ et on a $\|MX\| = 0$ ssi $X = 0$ car $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ainsi par le thm spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P\,M^tM\,P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$

On peut donc poser $S := P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $P \in O_n(\mathbb{R})$)

On a $S^2 = M^tM$ et si l'on pose $O = MS^{-1}$ il vient :

$${}^tOO = {}^t(MS^{-1})\,MS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = Id.$$

Ainsi $M = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc φ est surjective

* φ est injective : Supposons que l'on ait $M = OS = O'S'$ avec $O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors il vient

$$S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'\,{}^tO'O'S' = S'^2 \quad \text{donc } S^2 = S'^2.$$

Soit Q un polynôme tel que pour tout i, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, Alors

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = PQ\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) P^{-1} = Q\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}\right) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$

Or S' commute avec S'^2 donc avec $Q(S'^2) = S$. Ainsi S et S' commutent et elles sont diagonalisables, donc co-diagonalisable.

Ainsi il existe $P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S' = P_0\,\mathrm{diag}(\mu_i')P_0^{-1}$ et $S = P_0\,\mathrm{diag}(\mu_i)P_0^{-1}$

On a $S'^2 = S^2 \Rightarrow P_0\,\mathrm{diag}(\mu_i'^2)P_0^{-1} = P_0\,\mathrm{diag}(\mu_i^2)P_0^{-1}$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]\ \mu_i'^2 = \mu_i^2$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]\ \mu_i' = \mu_i$ car $S, S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow S = S'$

Et par suite $O = O'$. D'où φ est injective.

* $\varphi^{-1} : Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ est continue.
$$M \longmapsto (O, S)$$

Montrons-le en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.
Soit (M_k) une suite de $Gl_n(\mathbb{R})$ convergente vers $M \in Gl_n(\mathbb{R})$.

On note pour tout p, $M_p = O_p S_p$ et $M = OS$.

Montrons que $O_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} O$ et $S_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} S$.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$O_{\varphi(p)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \bar{O} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Alors $S_{\varphi(p)}$ converge vers $\bar{O}^{-1} M$ et on a
$$\bar{S} := \bar{O}^{-1} M \in \overline{Gl_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})} = Gl_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

On a donc par unicité de la décomposition polaire $M = \bar{O}\bar{S}$ et $\bar{O} = O$ et $\bar{S} = S$.

Ainsi $(O_p)_p$ admet une unique valeur d'adhérence O, donc elle converge vers O.

Par suite on a $S_p = O_p^{-1} M \longrightarrow O^{-1} M = S$. D'où le résultat.

Questions : Décomposition polaire

- Polynôme Q tel que $\forall i \quad Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$?

On peut par exemple prendre un polynôme interpolateur de Lagrange.
Quitte à renuméroter les λ_i, on peut supposer que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont distincts et que $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ apparaissent parmi ceux là. Le polynôme

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ i \neq j}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$ convient.

- Co-diagonalisable ?

Si A et B commutent avec A et B diagonalisables alors elles sont co-diagonalisables.

Soit u et v les endomorphismes associés à A et B.
Soit λ une valeur propre de u et E_λ le sous espaces propres associé à λ.

Alors on a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$

Or comme u et v commutent, on a E_λ qui est v-stable. Donc on peut considérer $v_{|E_\lambda}$.
Mais v est diagonalisable donc $v_{|E_\lambda}$ l'est aussi. On note B_λ une base de vecteurs propres de $v_{|E_\lambda}$.
On considère alors $\mathcal{B} = \bigcup_\lambda B_\lambda$ et cette base convient.

rem : On a : Soit A et B diagonalisables.
A et B commutent ssi A et B sont co-diagonalisables.

- Caractérisation séquentielle de la continuité ?

f est continue en a ssi pour toute suite (x_n) qui converge vers a alors $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

- $O_n(\mathbb{R})$ est compact ?
  - $O_n(\mathbb{R})$ fermé par image réciproque d'une application continue $(A \mapsto {}^tAA)$ d'un fermé (I_d).
  - $O_n(\mathbb{R})$ est borné : On a $\|AX\| \leq 1$ donc $|||A|||_\infty \leq 1$.

Ainsi c'est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc il est compact.

- $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^{+}(\mathbb{R})$?

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. On a $A_p = A + \frac{1}{p} I_n \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$

et on a $A_p \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \ \forall p \in \mathbb{N}^*$ car ses valeurs propres sont celles de $A + \frac{1}{p}$ donc strictement positives

Donc $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$

Or on a $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$ donc $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \overline{S_n^+(\mathbb{R})}$

Or $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ donc $\overline{S_n^+(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$.

Pour X fixé : $S \overset{f_X}{\longmapsto} {}^tXSX$ est continue

$S_n^+(\mathbb{R}) = \bigcap_{X \in \mathbb{R}^n} f_X^{-1}([0,+\infty[)$ intersection quelconque de fermés donc fermé

Donc $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \subset S_n^+(\mathbb{R})$. D'où $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$.